

**Zur rechnerischen Ermittlung instationärer Temperaturfelder in
geschlossener und diskreter Form
- Programmsysteme und energietechnische Anwendung -**

Von der Fakultät Energietechnik der
Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Wolfgang Heidemann

aus Fellbach

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. E. Hahne
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. G. Lein
Tag der mündlichen Prüfung: 6. 2. 1995

Institut für Thermodynamik und Wärmetechnik
der Universität Stuttgart

Kurzfassung

Heidemann, Wolfgang:

Zur rechnerischen Ermittlung instationärer Temperaturfelder in geschlossener und diskreter Form - Programmsysteme und energietechnische Anwendung -

Die Berechnung instationärer Temperatur- und Wärmestromfelder in inhomogenen Körpern stellt einen ebenso komplizierten wie wichtigen Teilaspekt bei der Simulation und Optimierung technischer Prozesse dar. Die dabei auftretenden partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung müssen bei mehrdimensionalen, nichtlinearen Aufgabenstellungen numerisch behandelt werden und lassen sich für eindimensionale, lineare Probleme mittels analytischer Methoden lösen.

Trotz der bekannten mathematischen Beschreibung instationärer Wärmeleitprobleme bereitet die geschlossene (analytische) Auswertung für inhomogene Körper vielfach große Schwierigkeiten. Der zur Bearbeitung notwendige zeitliche Aufwand steht sehr oft in keinem angemessenen Verhältnis zum erzielten Nutzen.

Aus diesem Grund wird für die Berechnung technisch relevanter Temperaturfeldgleichungen in mehrschichtigen ebenen und hohlzylindrischen Körpern ein zur Programmierung geeignetes Näherungsverfahren entwickelt. Mit diesem Verfahren lassen sich konstante oder ortsabhängige Anfangsbedingungen, lineare zeitabhängige Randbedingungen der 1., 2 oder 3. Art, Kontaktwiderstände zwischen den Körperschichten und eine homogen verteilte, zeitabhängige innere Wärmequelle berücksichtigen. Als Lösungsansatz für das Temperaturfeld in jeder Körperschicht wird ein Polynom der Ortsvariablen mit unbekanntem zeitabhängigen Polynomkoeffizienten verwendet. Der Polynomgrad wird variabel gehalten.

Nach der ausführlichen Diskussion der verwendeten integralen Näherungsmethode wird der Lösungsalgorithmus sowie die programmtechnische Realisierung vorgestellt. Als Berechnungsergebnis werden Temperaturfeldgleichungen erzeugt, geeignet für die einfache direkte Weiterverarbeitung. Die Anwendung des Verfahrens zur Ermittlung von Kurz- und Langzeitlösungen wird anhand zahlreicher Testbeispiele für ein- und mehrschichtige ebene und zylindrische Körper gezeigt. Zur Verifikation des Näherungsverfahrens werden für homogene Körper exakte analytische Lösungen aus der Literatur, für inhomogene Körper numerisch ermittelte Referenzlösungen verwendet und mit den Näherungslösungen verglichen. Zur Abschätzung der mit dem Verfahren erzielbaren Ergebnisgüte wird ein Kriterium vorgeschlagen, das für eine gute Approximation einzuhalten ist.

Des Weiteren wird für die Berechnung zweidimensionaler Temperaturfelder, die aus asymmetrisch verteilten Randbedingungen resultieren, ein universelles Programmpaket auf der Grundlage einer Finite-Differenzen-Knotenbibliothek entwickelt. Damit ist es möglich, verschiedene nichtlineare Randbedingungstypen, Wärmequellen und die Temperaturabhängigkeit von Stoffwerten bei stationären und instationären Temperaturfeldberechnungen zu berücksichtigen. Beliebige Körper im x, y -; r, z -; r, φ -Koordinatensystem lassen sich schnell und einfach modellieren. Zur mathematischen Beschreibung der Energiebilanz für alle bei der Diskretisierung des Rechengebietes entstehenden Volumenelemente wird lediglich eine universelle Differenzen- (Knoten-) Gleichung verwendet. Mit diesem Programm wird das Verdampferrohr eines Parabolrinnenkollektors modelliert. Es werden die Temperaturverteilungen berechnet, die sich unter stationären und instationären

Abstract

Heidemann, Wolfgang:

On the calculation of closed form and discrete solutions for transient heat conduction problems - program systems and application in thermal engineering -

The determination of transient temperature and heat flux fields in inhomogeneous bodies is important for calculating and optimizing the performance of technical processes. The resulting partial differential equations of second order have to be solved numerically in case of multi-dimensional, non-linear problems and can be solved analytically in case of one-dimensional linear problems.

In spite of the fact that the mathematical description of transient heat conduction problems is well-known, the calculation of closed form (analytical) solutions for inhomogeneous bodies causes a lot of difficulties. In many cases the effort in terms of time for the evaluation is very high compared to the benefit achieved.

Due to this reason a programmable approximate solution procedure is developed for the determination of temperature field equations in multi-layered plane and cylindrical bodies. The procedure allows the consideration of constant or space dependent initial conditions, linear time dependent boundary conditions of the first, second or third kind, contact resistances between the layers and a homogeneous distributed, time dependent volumetric heat source. A polynomial in space containing unknown time dependent polynomial coefficients is used as a solution for the temperature field in each layer of the body. The degree of the polynomial is assumed to be variable.

After a detailed discussion of the used approximate integral solution method the algorithm as well as the computing concept is given. Temperature field equations suitable for simple direct use result from the calculation procedure. The application of the method to determine accurate short and long time solutions is shown with numerous examples for one- and multi-layered plane and cylindrical bodies. Exact analytical solutions, found in the related literature, are used for the verification of the solution method in case of homogeneous bodies and numerical solutions are used as reference for the validation in case of inhomogeneous bodies. In order to estimate the accuracy of the method a criterion is suggested which has to be kept for a good approximation.

Furthermore a universal program package based on a finite difference nodal point library is developed for the calculation of two-dimensional temperature fields caused by asymmetrical distributed boundary conditions. Various (non-linear) boundary conditions can be taken into consideration as well as heat sources and the temperature dependency of physical properties. Steady-state and transient calculations can be carried out, and it is possible to model arbitrary bodies in the x,y -; r,z -; r,φ -coordinate system quick and easy. The same general difference equation is used for the evaluation of the energy balance for any of the volume elements, resulting from the discretisation of the body.

Using the program package, the absorber tube of a parabolic trough collector is modeled. The temperature distributions, occurring under steady-state and transient operation conditions of the collector, are calculated. The consequences for the construction and performance of the collector resulting from the calculations are discussed.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
KURZFASSUNG	
INHALTSVERZEICHNIS	
FORMELZEICHEN	
1. EINLEITUNG	1
1.1 Allgemeines	1
1.2 Aufgabenstellung	2
2. ANALYTISCHES NÄHERUNGSVERFAHREN ZUR GESCHLOSSENEN TEMPERATURFELDBERECHNUNG	 4
2.1 Literaturübersicht	4
2.2 Lösungsschema	8
2.3 Theoretische Grundlagen am Beispiel der ebenen Geometrie	9
2.3.1 Physikalische Problemstellung - Definition des Randwertproblems	10
2.3.2 Mathematisches Modell	13
2.3.2.1 Normierte Größen, dimensionslose Kennzahlen und Abkürzungen	13
2.3.2.2 Beschreibendes Gleichungssystem	14
2.4 Lösungsmethode	16
2.4.1 Integrale Näherungsverfahren - Verfahren der gewichteten Residuen	16
2.4.2 Gegenüberstellung des Galerkin- und Kantorowitsch-Verfahrens	19
2.4.3 Näherungsansatz und Basisfunktionen	22
2.5 Lösungsalgorithmus	25
2.5.1 Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der Zeitfunktionen	25
2.5.2 Lösung des Differentialgleichungssystems	27
2.6 Gütekriterium zur Beurteilung der Näherungslösung	32
2.7 Zylindergeometrie	33
2.7.1 Mathematisches Modell	33
2.7.1.1 Normierte Größen, dimensionslose Kennzahlen und Abkürzungen	33
2.7.1.2 Beschreibendes Gleichungssystem	35
2.7.2 Lösungsansatz	36
2.7.3 Lösungsalgorithmus	37
3. RECHNEREINSATZ BEI DER ERZEUGUNG VON TEMPERATURFELDGLEICHUNGEN	 39
3.1 Grundsätzliche Überlegungen	39
3.2 Die Darstellung von Energie- und Wärmestromdichtefunktionen und ihre	

3.3	Ablaufplan zur rechnerunterstützten Temperaturfeldbestimmung	43
3.3.1	Vorbereitende Eingaben und Arbeiten	43
3.3.2	Temperaturfeldberechnung	44
3.3.3	Aspekte der Programmierung	45
3.4	Berechnungsbeispiel	47
3.5	Merkmale der rechnerunterstützten Erzeugung von Temperaturfeldgleichungen	51
4.	BERECHNUNGSBEISPIELE FÜR KURZ- UND LANGZEITLÖSUNGEN	52
4.1	Die iterative Ermittlung von Kurzzeitleösungen	53
4.1.1	Beispiel 1 - Abkühlung der ebenen Platte mit Randbedingungen der 3. Art	56
4.1.2	Beispiel 2 - Temperaturverteilung im Sandboden um eine brennende Ölquelle	57
4.2	Genauigkeit der Näherungslösungen für lange Zeiten	62
4.2.1	Quasistationäres Temperaturfeld im halbumendlichen Körper	63
4.2.2	Platte mit homogener innerer Wärmequelle	68
4.2.3	Temperaturverlauf beim Aufheizen von Rohren	71
4.2.4	Berechnung der Wärmeabgabe einer Deckenkonstruktion	73
4.3	Ausgesuchte Aspekte der Temperaturfeldbestimmung in inhomogenen Körpern für lange Zeiten	76
4.3.1	Die Berücksichtigung von Kontaktwiderständen am Beispiel des Auskühlens einer zweischichtigen Ofenwand	76
4.3.2	Die Anwendung von Superpositionsprinzipien zur Lösungsdarstellung in großen Zeitintervallen	79
4.3.2.1	Das Duhamelsche Theorem	79
4.3.2.2	Die additive Überlagerung für abschnittsweise, durch analytische Elementarfunktionen beschreibbare Erregerverläufe	81
4.3.2.3	Ermittlung der Näherungslösung für das Temperaturfeld in einer dreischichtigen Gebäudeaußenwand durch Superposition	83
4.4	Schlußbemerkungen zur Anwendbarkeit des Näherungsverfahrens	91
5.	DER EINSATZ EINER FINITE-DIFFERENZEN-KNOTENBIBLIOTHEK ZUR NUMERISCHEN TEMPERATURFELDBERECHNUNG	94
5.1	Globaler Überblick zum Stand der Berechnungsmethoden	94
5.2	Allgemeines Finite-Differenzen-Verfahren zur Lösung elliptischer und parabolischer Differentialgleichungen der Wärmeleitung	96
5.2.1	Grundlagen und Lösungskonzept	96

5.2.3	Bestimmung der Finite-Differenzen-Koeffizienten	103
5.2.3.1	Kartesisches Koordinatensystem	103
5.2.3.2	Zylinder-Koordinatensystem	104
5.2.4	Knotenbibliothek	105
5.2.4.1	Aufbau und Ordnungsprinzip	107
5.2.4.2	Element- bzw. Knotentypen	107
5.2.5	Modellierung von Rand- und Anschlußbedingungen	108
5.2.6	Die Berücksichtigung von Nichtlinearitäten	110
5.3	Lösung des Differenzgleichungssystems	114
5.3.1	Sukzessive Überrelaxation	114
5.4	Diskretisierungsbeispiel	117
5.5	Programmablauf	120
5.6	Konvergenz und Stabilitätsbetrachtungen	123
5.7	Überprüfung des Verfahrens	128
5.7.1	Beispiel 1 - Berechnung der Aufheizkurve eines Stahlblockes unter Berücksichtigung temperaturabhängiger Stoffwerte	128
5.7.2	Beispiel 2 - Strahlungsaustausch zwischen zwei konzentrischen Kreiszyklindern	130
5.7.3	Beispiel 3 - Temperaturfeldberechnung im rechteckigen Stab unter Berücksichtigung asymmetrisch verteilter Randbedingungen	131
6.	BERECHNUNGSBEISPIEL ZUR NUMERISCHEN TEMPERATURFELDBESTIMMUNG	134
6.1	Temperaturfeldberechnung im Verdampferrohr eines Parabolrinnenkollektors	134
6.1.1	Einführung in die Problemstellung	134
6.1.2	Geometrie und Randbedingungen	136
6.1.3	Numerisches Modell	138
6.1.4	Stationäre Betriebsbedingungen	138
6.1.5	Instationäre Betriebsbedingungen	143
6.1.5.1	Simulation eines Tagesganges	144
6.1.5.2	Simulation von Abschattungseffekten	145
6.1.6	Praktische Konsequenzen	147
7.	ZUSAMMENFASSUNG	148
8.	LITERATUR	151
9.	ANHANG	158